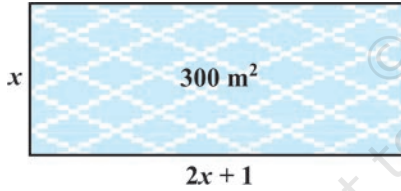
4 دودرجی مساواتیں (QUADRATIC EQUATIONS)

4.1 تعارف

باب 2 میں آپ نے مختلف قسم کی کثیر رکنیوں کے بارے میں پڑھا۔ جس میں ایک قسم دو درجی کثیر رکنی بھی تھی جو $ax^2+bx+c, a\neq 0$ کی شکل کی ہوتی ہے۔ جب ہم اس کثیر رکنی کو صفر کے برابر رکھ دیتے ہیں تو یہ دودرجی مساوات بن جاتی ہے۔ جب ہم بہت سے روزمرہ کے مسائل کا سامنا کرتے ہیں تو دودرجی مساواتیں ابھر کر سامنے آتی ہیں۔ مثال کے طور پر ایک خیراتی ٹرسٹ عبادت کے لیے ایک ایسا ہال بنانا چاہتا ہے جس کا کارپیٹ (قالین) کا رقبہ 300 مربع میٹر ہو اور اس کی لمبائی چوڑائی کے دوگنے سے 1 میٹر زیادہ ہو۔ تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہوگی؟ مان لیجیے ہال کی چوڑائی x میٹر ہے تب اس کی لمبائی ہوگی $(2x+1)$ میٹر۔ اس مسئلہ کو تصویری طور پر ہم نے شکل 4.1 میں دکھایا ہے

x $300\ m^2$ $2x + 1$

شکل 4.1

اب   ہال کا رقبہ $= x(2x+1)$ مربع میٹر $= (2x^2+x)$ مربع میٹر

اس لئے $2x^2+x=300$ (دیا ہوا)

اس لئے $2x^2+x-300=0$

اس طرح سے ہال کی چوڑائی، مساوات $2x^2+x-300=0$ جو ایک دودرجی مساوات ہے، کو مطمئن کریں گی۔

بہت سے لوگوں کا یہ ماننا ہے کہ بیبلونین (Babylonians) پہلے وہ لوگ تھے جنھوں نے دو درجی مساواتوں کو حل

کیا۔مثال کے طور پر وہ جانتے تھے کیسے دو مثبت اعداد کو معلوم کیا جاسکتا ہے جن کا حاصل جمع مثبت ہو اور حاصل ضرب بھی مثبت ہو اور یہ مسلہ دو درجی مساوات $x^2 - px + q = 0$ کو حل کرنے کے معادل ہے۔یونانی ریاضی داں اقلیدس نے لمبائیاں ، جو ہماری موجودہ اصطلاح میں دو درجی مساوات کا حل ہے، معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ نکالا۔دو درجی مساواتوں کو حل کرنے کا سہرا ، قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں کے سر جاتا ہے۔درحقیقت برہم گپتا (598 - 665 C.E.) نے $ax^2 + bx = c$ کی شکل والی دو درجی مساواتوں کا حل کرنے کا ایک صریح فارمولہ دیا۔بعد میں سری دھرا چاریہ (1025 C.E.) نے ایک فارمولہ معلوم کیا جواب دو درجی فارمولہ کہلاتا ہے (جیسا کے بھاسکر II سے کوٹ کیا گیا ہے) جس سے دو درجی مساواتوں کو کامل مربع کے طریقہ سے حل کیا جاتا ہے۔ایک عرب ریاضی داں الخورزمی (تقریباً 800 عیسوی) نے بھی مختلف قسم کی دو درجی مساواتوں کا مطالعہ کیا Abraham bar Hiyya Ha-Nasi نے اپنی کتاب 'Liber embadorum' جو 1145 C.E. میں یورپ میں چھپی، میں مختلف دو درجی مساواتوں کا حل دیا۔

اس باب میں آپ دو درجی مساواتوں کے بارے میں پڑھیں گے اوران کے حل مختلف طریقوں کے ذریعہ سے معلوم کریں گے۔آپ روزمرہ کے مسئلوں کو حل کرنے میں اس کے استعمال کے بارے میں بھی سیکھیں گے۔

4.2 دو درجی مساوات

متغیر x میں دو درجی مساوات وہ مساوات ہے جس کی شکل $ax^2 + bx + c = 0$ کی ہوتی ہے جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ مثال کے طور پر $2x^2 + x - 300 = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے اسی طرح $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ، $4x - 3x^2 + 2 = 0$ اور $1 - x^2 + 300 = 0$ بھی دو درجی مساواتیں ہیں۔

درحقیقت کوئی بھی $p(x) = 0$ کی شکل کی مساوات جہاں $p(x)$ درجہ 2 کی کثیر رکنی ہے، دو درجی مساوات ہے۔لیکن جب ہم $P(x)$ کی ارکان کو درجہ کے حساب سے سے گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں تب ہمیں مساوات کی معیاری شکل حاصل ہوتی ہے۔ یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ یہ دو درجی کی معیاری شکل کہلاتی ہے۔

ہمارے اردگرد کی دنیا کے ریاضی کے مختلف میدانوں میں ہمیں دو درجی مساواتوں کی بہت سی صورت حال ملیں گی۔آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل صورت حال کو ریاضیاتی طور پر ظاہر کیجیے۔

(i) جون اور جیوانتی کے پاس 45 ماربل ہیں۔دونوں 5 , 5 ماربل کھودیتے ہیں اوران کے پاس باقی بچے ماربل کا حاصل

ضرب 124 ہے۔ ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ شروعات میں ان دونوں کے پاس کتنے ماربل تھے۔

(ii) ایک کاٹیج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ کھلونے بناتے ہے۔ ہر ایک کھلونہ کو بنانے میں ہوا خرچ (روپیوں میں) ایک دن میں بنے کھلونوں کی تعداد سے 55 کم ہے۔ کسی ایک دن کھلونہ بنانے کا کل خرچ 750 روپے ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اس دن کل کتنے کھلونے بنائے گئے۔

حل:

(i) مان لیجئے جون کے پاس x ماربل تھے

تو جیونتی کے پاس ماربل ہوئے $=(45-x)$ (کیوں؟)

جب جون نے 5 ماربل کھودئے تو اس کے پاس بچے ماربل $= x-5$

جب 5 ماربل کھو گئے تو جیونتی کے پاس بچے کل ماربل $= 45-x-5$

$= 40-x$

اس لئے ان کا حاصل ضرب $=(x-5)(40-x)$

$= 40x-x^2-200+5x$

$= -x^2+45x-200$

اس لئے $-x^2+45x-200=124$ (دیا ہوا ہے، کے حاصل ضرب 124)

یعنی $-x^2+45x-324=0$

یعنی $x^2-45x+324=0$

اس لئے جون کے پاس جو ماربل ہوں گے وہ دودرجی مساوات $x^2-45x+324=0$ کو مطمئن کریں گے جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

(ii) مان لیجئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد x ہے

اس لئے اس دن ہر ایک کھلونہ بنانے کا خرچ (روپیوں میں) ہے $= 55-x$

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کا کل خرچ $= x(55-x)$

اس لئے $x(55 - x) = 750$

یعنی $55x - x^2 = 750$

یعنی $-x^2 + 55x - 750 = 0$

یعنی $x^2 - 55x + 750 = 0$

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد دودرجی مساوات $x^2 - 55x + 750 = 0$ کو مطمئن کرے گی جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

مثال 2: جانچ کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل دودرجی مساواتیں ہیں یا نہیں۔

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

حل:

(i) $\text{LHS} = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

اس لئے $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ کو لکھا جا سکتا ہے۔

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$

یعنی $x^2 - 6x + 8 = 0$

جو $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل ہے۔

اس لئے دی ہوئی مساوات دودرجی مساوات ہے۔

(ii) کیونکہ $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ اور $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

اس لئے $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

یعنی $x + 12 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی نہیں ہے اس لئے یہ دودرجی مساوات نہیں ہے۔

(iii) یہاں $\text{LHS} = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$

اس لئے $x(2x+3) = x^2 + 1$ اس کو ہم لکھ سکتے ہیں

$$2x^2 + 3x = x^2 + 1$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x^2 + 3x - 1 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہے

اس لئے یہ دو درجی مساوات ہے۔

(iv) $\text{LHS} = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

اس لئے $(x+2)^3 = x^3 - 4$ کو لکھ سکتے ہیں

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

یعنی $6x^2 + 12x + 12 = 0$ یا $x^2 + 2x + 2 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کا ہے۔

اس لئے یہ دو درجی مساوات ہیں۔

ریمارک: (ii) کے بارے میں خبردار! اس میں دی ہوئی مساوات دو درجی نظر آ رہی ہے لیکن یہ دو درجی نہیں ہے اسی طرح (iv) کی مساوات دیکھنے میں کعبی مساوات نظر آتی ہے (درجہ 3 والی مساوات) لیکن یہ دو درجی مساوات نکلی، جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی مساوات کے بارے میں کوئی نظریہ قائم کرنے سے پہلے اس کو مختصر کر لیجیے۔

مشق 4.1

1۔ جانچ کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں کون سی مساواتیں دو درجی ہیں:

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1(x+3)$

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2۔ مندرجہ ذیل صورت حال کو دودرجی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) ایک مستطیل کی شکل والے پلاٹ کا رقبہ 528m^2 ہے۔اس پلاٹ کی لمبائی (میٹروں میں) اس کی چوڑائی کے دگنے سے 1 زیادہ ہے ہمیں پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(ii) دولگا تار مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے۔ ہمیں صحیح اعداد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(iii) روہن کی ماں اس سے عمر میں 26 سال بڑی ہے ۔3 سال بعد ان کی عمروں (سالوں میں) کا حاصل ضرب 360 ہوگا۔ ہم روہن کی موجودہ عمر معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

(iv) ایک ٹرین 480 کلومیٹر کا فاصلہ یکساں رفتار سے طے کرتی ہے۔ اگر اس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم ہوتی ہے تو وہی فاصلہ طے کرنے میں 3 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے ہمیں ٹرین کی رفتار معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

4.3 اجزائے ضربی کے طریقہ سے دودرجی مساوات کا حل

دودرجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$ پر غور کیجئے۔ اگر ہم اس مساوات کی LHS میں x کی جگہ 1 رکھ دیں تو ہمیں ملتا ہے $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = \text{RHS}$ ہم کہتے ہیں کہ 1 دودرجی مساوات کا جزر ہے۔ اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ 1 دودرجی کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 1$ کا صفر ہے

عمومی طور پر ایک حقیقی عدد α دودرجی مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ $x=\alpha$ دودرجی مساوات کا حل ہے یا α دودرجی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ یہ بات نوٹ کیجیے کہ دودرجی کثیر رکنی ax^2+bx+c کے صفر اور دودرجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جزر ایک ہی ہوتے ہیں۔

باب 2 میں آپ نے مشاہدہ کیا تھا کے دودرجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں اس لئے کسی بھی دودرجی مساوات کے زیادہ سے زیادہ دو جزر ہو سکتے ہیں۔

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ وسطی رکن کو منقسم کرکے ہم کس طرح دودرجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی بناتے ہیں۔ ہم اس علم کو دودرجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کے لئے استعمال کریں گے۔

آیئے دیکھتے ہیں کیسے۔

مثال3: اجزائے ضربی کے طریقہ سے دودرجی مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل: آیئے وسطی رکن $-5x$ کو $(-2x - 3x)$ میں منقسم کرتے ہیں [کیونکہ $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$]

اس لئے $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 = 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$

اب $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو ہم $(2x - 3)(x - 1) = 0$ کی طرح لکھ سکتے ہیں

یعنی یا تو $(2x - 3 = 0)$ یا $(x - 1) = 0$

اب $2x - 3 = 0$ سے ہمیں $x = \frac{3}{2}$ ملتا ہے اور $x - 1 = 0$ سے $x = 1$ ملتا ہے

دوسرے لفظوں میں 1 اور $\frac{3}{2}$ مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر ہیں،

تصدیق کیجئے یہ دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں۔

نوٹ کیجیے ہم نے $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر $2x^2 - 5x + 3$ اجزائے ضربی میں تحلیل کر کے دوخطی اجزائے ضربی بنایئے اور ہر جزوضربی کو صفر کے برابر رکھئے پھر معلوم کرتے ہیں۔

مثال4: دودرجی مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$

$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$

$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر x کی قدریں ہیں جس کے لئے $(3x - 2)(2x + 1) = 0$

اس لئے، $3x - 2 = 0$ یا $2x + 1 = 0$

یعنی $x = \frac{2}{3}$ یا $x = -\frac{1}{2}$

اس لئے $6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر ہیں $\frac{2}{3}$ اور $-\frac{1}{2}$۔

ہم جزروں کی تصدیق اس طرح کر سکتے ہیں، ان کی قدریں مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ میں رکھ کر دیکھیں کہ وہ اس کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

مثال 5: دو درجی مساوات $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل:

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$$

$$= \sqrt{3}\,x\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)$$

اس لئے مساوات کے جزر x کی وہ قدریں ہیں جن کے لئے

$$\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right) = 0$$

اب، $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ یا $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

اس لئے جزروں کی تکرار ہے، ہر ایک تکراری جزو ضربی $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ کے لئے

اس لئے $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر ہیں $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$

مثال 6: سیکشن 4.1 میں لئے گئے عبادت کے ہال کے ابعاد معلوم کیجیے

حل: سیکشن 4.1 میں ہم نے پایا تھا کہ اگر ہال کی چوڑائی x m, تب x مساوات $2x^2 + x - 300 = 0$ کو مطمئن کرے گا اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کرنے پر ہم مساوات کو لکھتے ہیں۔

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x\,(x - 12) + 25\,(x - 12) = 0$$

یعنی $\quad (x - 12)(2x + 25) = 0$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جزر ہیں $x = 12$ یا $x = -12.5$ کیونکہ x ہال کی چوڑائی ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہو سکتی

اس لئے ہال کی چوڑائی 12 میٹر ہے اور اس کی لمبائی $2x + 1 = 25$ میٹر ہے۔

مشق 4.2

1۔ اجزائے ضربی کے طریقہ سے مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کو حل کیجیے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$　　(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$　　(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2۔ مثال 1 میں دیے گئے سوالوں کو حل کیجیے۔

3۔ دو عدد معلوم کیجیے جن کا حاصل جمع 27 ہے اور حاصل ضرب 182 ہے۔

4۔ دو لگاتار مثبت صحیح اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 365 ہے۔

5۔ ایک قائم مثلث کا ارتفاع اس کے قاعدہ سے 7 سینٹی میٹر کم ہے۔ اگر اس کا وتر 13 سینٹی میٹر ہے تو باقی دو ضلع معلوم کیجیے۔

6۔ ایک کاٹج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ برتن بناتی ہے، یہ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ کسی ایک دن ہر ایک ایک برتن کے بنانے کا خرچ (روپیوں میں) اس دن بنے برتنوں کے دگنے سے 3 زیادہ ہے۔ اگر اس دن برتن بنانے کا کل خرچ 90 روپے ہے تو اس دن بنے برتنوں کی کل تعداد اور ہر برتن کا خرچ معلوم کیجیے۔

4.4 دو درجی مساواتوں کا حل مربع کو مکمل کر کے

پچھلے سیکشن میں آپ نے دو درجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کا ایک طریقہ سیکھا۔ اس سیکشن میں ہم ایک اور طریقہ سیکھیں گے۔

مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجیے۔

سنیتا کی دو سال پہلے کی عمر (سالوں میں) اور چار سال بعد کی عمر کا حاصل ضرب اس کی موجودہ عمر کا دگنا ہے اس کی موجودہ عمر کیا ہے؟

اس کا جواب دینے کے لیے مان لیجیے اس کی موجودہ عمر (سالوں میں) x ہے تب اس کی دو سال پہلے کی عمر اور چار سال بعد کی عمر کا حاصل ضرب ہوگا $(x - 2)\ (x + 4)$

اس لیے　$(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

یعنی　$x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

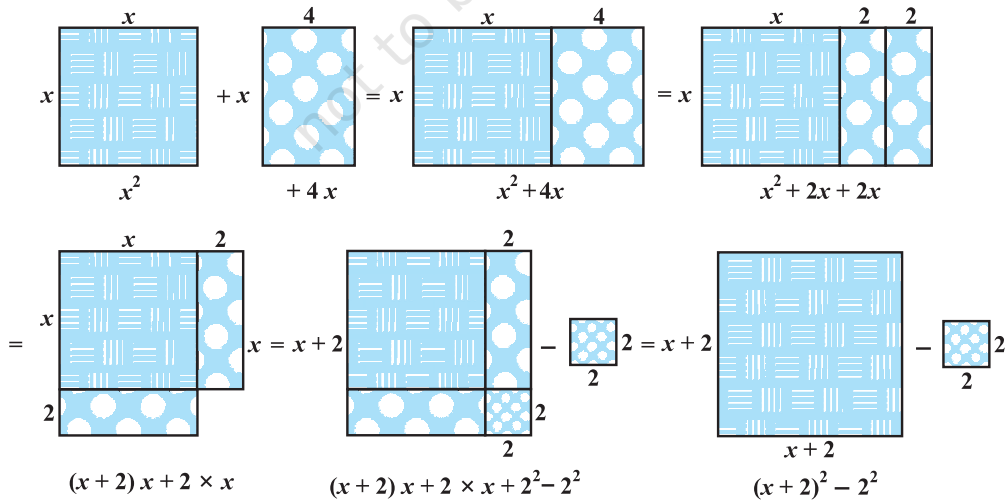
یعنی　$x^2 - 9 = 0$

اس لیے سنیتا کی موجودہ عمر دو درجی مساوات $x^2 - 9 = 0$ کو مطمئن کرتی ہے

ہم اس کو $x^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں جزر مربع لینے پر $x = 3$ یا $x = -3$ کیونکہ عمر مثبت صحیح عدد ہے اس لیے $x = 3$
اس لیے سنیتا کی موجودہ عمر 3 سال ہے

اب مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ پر غور کیجیے۔اس کو حل کرنے کے لیے ہم $(x+2)^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں ،
جزر المربع لینے پر ہمیں ملتا ہے $x + 2 = 3$ یا $x + 2 = -3$
اس لئے $x = 1$ یا $x = -5$
اس لئے مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ کے ہیں 1 اور -5

اوپر دی گئی دونوں مثالوں میں وہ رکن جس میں x ہے پوری طرح مربع کے اندازہ ہے۔اس لیے ہم نے آسانی سے جزر المربع لے کر جذر معلوم کر لیے۔لیکن اگر ہم سے دودرجی مساوات $x^2 + 4x - 5 = 0$ کے جزر معلوم کرنے کو کہا جائے تو کیا ہوگا ؟ یقیناً ہم ایسا کرنے کے لیے اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کریں گے جب تک کہ ہم یہ نہ جان لیں (کسی طرح) کہ $x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9$ ہے۔

اس لیے $x^2 + 4x - 5 = 0$ کو حل کرنا معادل ہے $(x+2)^2 - 9 = 0$ کو حل کرنے کے جو ہم دیکھ چکے ہیں کہ بہت آسان ہے اور تیزی سے ہوسکتا ہے۔دراصل ہم کسی بھی دودرجی مساوات کو $(x+a)^2 - b^2 = 0$ کی شکل میں بدل سکتے ہیں۔اور پھر ہم آسانی سے جزر معلوم کر سکتے ہیں۔آیئے دیکھتے ہیں کہ کیا یہ آسان ہے۔شکل 4.2 دیکھیے۔

شکل 4.2

عمل ذیل میں دیا گیا ہے

$$x^2 + 4x = (x^2 + \frac{4}{2}x) + \frac{4}{2}x$$

$$= x^2 + 2x + 2x$$

$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$

$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$

$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$

$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$

$$= (x + 2)^2 - 4$$

اس لئے $x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$

اس لئے $x^2 + 4x - 5 = 0$ کو ہم $(x+2)^2 - 9 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ فاصل مربع کے طریقہ سے، اس کو ہم کامل مربع کا طریقہ کہتے ہیں۔ مختصراً ہم اس کو ذیل میں دکھاتے ہیں:

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

اس لئے $x^2 + 4x - 0$ کو لکھا جا سکتا ہے

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

یعنی $(x+2)^2 - 9 = 0$

اب مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ پر غور کیجیے، نوٹ کیجیے کہ x^2 کا ضریب کامل مربع نہیں ہے۔ اس لئے ہم مساوات کو دونوں طرف 3 سے ضرب کرتے ہیں۔

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

اب $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

اس لئے $9x^2 - 15x + 6 = 0$ کو لکھا جا سکتا ہے

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

یعنی
$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

اس لئے $9x^2 - 15x + 6 = 0$ کے جذر وہی ہیں جو $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ کے ہیں

یعنی
$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ یا $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

(ہم اس کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ جہاں '±' کا مطلب ہے 'جمع نفی')

اس طرح
$3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ یا $3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

اس لئے
$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ یا $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

اس لئے
$x = 1$ یا $x = \frac{4}{6}$

یعنی
$x = 1$ یا $x = \frac{2}{3}$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں 1 اور $\frac{2}{3}$

ریمارک: اس عمل کو دوسرے طریقہ سے ہم ذیل میں دکھاتے ہیں

مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ وہی ہے جو

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

اب

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

اس لئے $3x^2 - 5x + 2 = 0$ کے حل وہی ہیں جو $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ کے ہیں ۔

جو ہیں $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$ یعنی $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ اور $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

آیئے اس عمل کی مزید وضاحت کے لئے کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 7: مثال 3 میں دی گئی مساوات کو کامل مربع کے طریقے سے حل کیجیے۔

حل: مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ وہی ہے جو $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

اب
$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

اس لئے $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

اس لئے مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر بالکل وہی ہوں گے جو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ کے ہیں

اب $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ وہی جو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

اس لئے
$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$$

یعنی
$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

یعنی
$$x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \text{ یا } x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

یعنی
$$x = \frac{3}{2} \text{ یا } x = 1$$

اس لئے مساوات کے حل ہیں 1 اور $x = \frac{3}{2}$

آیئے حلوں کی تصدیق کرتے ہیں

$x = \frac{3}{2}$ کو $2x^2 - 5x + 3 = 0$ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$ جو صحیح ہے، اسی طرح سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ $x = 1$ دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

مثال 7 میں ہم نے مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو دونوں طرف 2 سے تقسیم کیا تھا جس سے ہمیں $x^2 \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ حاصل ہوتا ہے اور پہلا رکن کامل مربع ہو جاتا ہے اور پھر مربع کو مکمل کرتے ہیں۔ اس کے بجائے ہم دونوں طرف 2 سے ضرب کر کے پہلے رکن کو $4x^2 = (2x)^2$ کامل مربع بنا کر پھر مکمل کر سکتے ہیں۔

اس طریقہ کی وضاحت اگلی مثال میں کی گئی ہے۔

مثال 8: مساوات $5x^2 - 6x - 2 = 0$ کے جذر مربع مکمل کرنے (کامل مربع) کے طریقہ سے معلوم کیجیے۔

حل: مساوات کے دونوں طرف 5 سے ضرب کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$25x^2 = 30x - 10 = 0$$

یہ مساوات ایسی ہے جیسے

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

یعنی $(5x-3)^2 - 9 - 10 = 0$

یعنی $(5x-3)^2 - 19 = 0$

یعنی $(5x-3)^2 = 19$

یعنی $5x - 3 = \pm\sqrt{19}$

یعنی $5x = 3 \pm \sqrt{19}$

اس لئے $x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$

اس لئے جزر ہیں $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$

تصدیق کیجیے کہ جزر ہیں $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ اور $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$

مثال 9: مربع مکمل کرنے کے طریقہ سے $4x^2 + 3x + 5 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل: نوٹ کیجیے کہ $4x^2 + 3x + 5 = 0$ وہی جو

$$2x^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

یعنی $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

یعنی $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

یعنی $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{6} < 0$$

لیکن $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے منفی نہیں ہوسکتا (کیوں؟) اس لئے x کی کوئی ایسی حقیقی قدر نہیں ہے جو دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہوں گے۔

اب آپ نے مربع مکمل کرنے کے طریقہ کی بہت سی مثالیں دیکھ لیں۔ آیئے اب اس طریقے کو عمومی بناتے ہیں۔

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ پر غور کیجیے۔ دونوں طرف a سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

یہ وہی ہے جسے $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

یعنی $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جزر وہی ہوں گے جو مساوات

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$ یعنی $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ کے

اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ تب (1) کا جزر المربع لینے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اس لئے $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اس لئے مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جزر ہیں $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اگر

$b^2-4ac \geq 0$ اگر $b^2-4ac<0$ تو مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہوں گے (کیوں؟)

اس طرح اگر $b^2-4ac \geq 0$، تب دودرجی مساوات کے حقیقی جذر ہیں $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

دودرجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کا یہ فارمولہ دودرجی فارمولہ کہلاتا ہے۔

آیئے کچھ مثالیں لے کر اس فارمولہ کی وضاحت کریں۔

مثال 10: مشق 4.1 کا سوال نمبر 2(i) کو دودرجی فارمولہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل: مان لیجئے پلاٹ کی چوڑائی x میٹر ہے تب لمبائی $(2x + 1)$ میٹر ہے تب ہمیں دیا ہوا ہے کہ $x(2x + 1) = 528$ یعنی

$$2x^2 + x - 528 = 0$$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل ہے جہاں $a = 2$، $b = 1$, $c = -528$

اس لئے دودرجی فارمولہ سے ہمیں حل ملتے ہیں۔

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

یعنی $x = \frac{64}{4}$ یا $x = \frac{-66}{4}$

یعنی $x = 16$ یا $x = \frac{-66}{4}$

کیونکہ x منفی نہیں ہوسکتا کیونکہ یہ پلاٹ کی چوڑائی ہے اس لئے پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر اور پھر لمبائی 33 میٹر ہے۔

آپ ان قدروں کی تصدیق مساوات کو مطمئن کر سکتے ہیں۔

مثال 11: دو لگاتار (مسلسل) مثبت طاق صحیح اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 290 ہے۔

حل: مان لیجیے دو مثبت صحیح طاق اعداد میں چھوٹا عدد x ہے تب دوسرا صحیح عدد $x + 2$ ہوگا۔ سوال کے مطابق

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$

یعنی $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

یعنی $2x^2 + 4x - 286 = 0$

یعنی $x^2 + 2x - 143 = 0$

جو کے x میں ایک دو درجی مساوات ہے۔

دو درجی فارمولہ کو استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

یعنی $x = -13$ یا $x = 11$

لیکن کیونکہ x ایک مثبت طاق صحیح عدد ہے اس لئے $x \neq -13$ یعنی $x = 11$

اس لئے دو مسلسل طاق صحیح اعداد ہیں 11 اور 13

جانچ: $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$

مثال 12: ایک مستطیل نما پارک کو اس طرح ڈیزائن کیا جاتا ہے کہ اس کی چوڑائی اس کی لمبائی سے 3 میٹر کم ہو اور اس کا رقبہ پہلے ہی سے بنے مساوی الساقین مثلث نما پارک کے رقبہ سے 4 میٹرز زیادہ ہے جبکہ مثلث کا قاعدہ وہی ہے جو مستطیل کی چوڑائی ہے اور اس کا ارتفاع 12 میٹر ہے۔ اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے مستطیل نما پارک کی چوڑائی x میٹر ہے۔

اس لئے اس کی لمبائی = $(x + 3)$

اس لئے مستطیل پارک کا رقبہ = $x(x + 3)\text{m}^2 = (x^2 + 3x)\text{m}^2$

اب مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ہے = x m

اس لئے اس کا رقبہ $\frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x\,\text{m}^2$

ہماری ضرورت کے مطابق

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

یعنی $x^2 - 3x - 4 = 0$

دودرجی فارمولہ کرنے سے ہمیں ملتا ہے

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ یا } -1$$

لیکن $x \neq -1$ (کیوں؟) اس لئے $x = 4$

اس لئے پارک کی چوڑائی = 4 میٹر اور اس کی لمبائی 7 میٹر ہوگی۔

تصدیق: مستطیل نما پارک کا رقبہ = 28m^2

مثلث نما پارک کا رقبہ = $24 \text{ m}^2 = (28 - 4) \text{ m}^2$

مثال 13: دودرجی فارمولہ کی مدد سے مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کے جزر معلوم کیجیے اگر موجود ہوں۔

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

حل:

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ جہاں $a = 3$، $b = -5$، $c = 2$ اس لئے $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$

اس لئے $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$ یعنی $x = 1$ یا $x = \frac{2}{3}$

اس لئے جزر $\frac{2}{3}$ اور 1 ہیں

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ یہاں $a = 1, b = 4, c = 5$ اس لئے $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

کیونکہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع منفی نہیں ہوسکتا اس لئے $\sqrt{b^2 - 4ac}$ کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہوگی۔

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہیں۔

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$ یہاں $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$

اس لئے $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

اس لئے $x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ یعنی $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے جزر ہیں $\frac{1}{\sqrt{2}}$، $\frac{1}{\sqrt{2}}$

مثال 14: مندرجہ ذیل مساواتوں کے جزر معلوم کیجیے۔

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

حل:

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$ دونوں طرف x سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 + 1 = 3x$$

یعنی $x^2 - 3x + 1 = 0$ جو کے ایک دو درجی مساوات ہے

یہاں $a = 1, b = 3, c = 1$

اس لئے $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

اس لئے $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (کیوں؟)

اس لئے جزر ہیں $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ اور $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

جیسے کے $x \neq 0,2$, مساوات کو $x(x-2)$ سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$

$$= 3x^2 - 6x$$

اس لئے دی ہوئی مساوات $3x^2 - 6x + 2 = 0$ میں تحلیل ہوگئی جو ایک دو درجی مساوات ہے۔

یہاں $a = 3, b = -6, c = 2$ اس لئے $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

اس لئے $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$

اس لئے جزر ہیں $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ اور $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

مثال 15: ایک موٹر بوٹ جب کہ ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار 18 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ 24 کلومیٹر کا فاصلہ ایک ہی مقام تک بہاؤ کے خلاف پہنچنے میں 1 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے بنسبت بہاؤ کے ساتھ چلنے میں۔ پانی کی رفتار معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے پانی کی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

اس لئے بوٹ کی بہاؤ کے خلاف رفتار ہے $(18 + x) =$ کلومیٹر فی گھنٹہ اور بہاؤ کے ساتھ بوٹ کی رفتار $(18 + x)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

بہاؤ کے خلاف جانے میں لیا گیا وقت $= \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \frac{24}{18 - x}$ گھنٹے

اسی طرح سے بہاؤ کے ساتھ جانے میں لیا گیا وقت $= \frac{24}{18 + x}$ گھنٹے

سوال کے مطابق

$$\frac{24}{18 - x} - \frac{24}{18 + x} = 1$$

یعنی $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

یعنی $x^2 + 48x - 324 = 0$

دو درجی فارمولہ کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ یا } -54$$

کیونکہ x پانی کی رفتار ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہوسکتی اس لئے ہم $x = -54$ کو نظر انداز کر دیتے ہیں، اس لئے $x = 6$ ہمیں پانی کی رفتار ملتی ہے جو 6 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

مشق 4.3

1۔ مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے جزر معلوم کیجیے، مربع مکمل کرنے کے طریقہ سے، اگر موجود ہوں۔

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2۔ سوال 1 میں دی گئی دو درجی مساوات کے جزر دو درجی فارمولہ سے کیجیے۔

3۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے جزر معلوم کیجیے۔

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$، $x \neq -4, 7$

4۔ رحمان کی 3 سال پہلے کی عمر اور 5 سال بعد کی عمر کے مقلوبوں کا حاصل جمع $\frac{1}{3}$ ہے اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

5۔ ایک کلاس ٹسٹ میں شیفالی کے ریاضی اور انگلش میں حاصل کردہ نمبروں کا حاصل جمع 30 ہے۔ اگر اس کے ریاضی میں 2 نمبر زیادہ ہوتے اور انگلش میں 3 نمبر کم ہوتے تو اس کے نمبروں کا حاصل ضرب 210 ہوتا۔ دو مضمون میں اس کے نمبر معلوم کیجیے۔

6۔ ایک مستطیل نما میدان کا وتر اس کے چھوٹے ضلع سے 60 میٹر زیادہ ہے۔ اگر اس کا بڑا ضلع چھوٹے ضلع سے 30 میٹر زیادہ ہے تو میدان کے اضلاع معلوم کیجیے۔

7۔ دو اعداد کے مربعوں کا حاصل فرق 180 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع بڑے عدد کا 8 گنا ہے۔ دو نمبر معلوم کیجیے۔

8۔ ایک ٹرین 360 کلومیٹر یکساں رفتار سے چلتی ہے۔ اگر اس کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو وہ یہی سفر 1 گھنٹہ میں کم میں طے کرتی۔ ٹرین کی رفتار معلوم کیجئے۔

9۔ پانی کے دو نل ایک ٹینک کو $9\frac{3}{8}$ گھنٹے میں بھرتے ہیں۔ بڑے قطر والا نل اسی ٹینک کو اکیلے بھرنے میں چھوٹے قطر والے نل سے 10 گھنٹہ کم لیتا ہے۔ وہ وقت معلوم کیجیے، جس میں دونوں نل علیحدہ علیحدہ اسی ٹینک کو بھریں گے۔

10۔ میسور سے بنگلور تک کا 132 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں ایک ایکسپریس ٹرین سواری گاڑی سے 1 گھنٹہ کم لیتی ہے۔ (درمیان میں آنے والے اسٹیشنوں پر رکنے کے وقت نظر انداز کرتے ہوئے) اگر ایکسپریس ٹرین کی اوسط رفتار سواری گاڑی کی اوسط رفتار سے 11 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہے۔ تو دونوں ٹرینوں کی اوسط رفتار معلوم کیجیے۔

11۔ دو مربعوں کے رقبہ کا حاصل جمع $468 m^2$۔ اگر ان کے احاطوں کا 24 میٹر ہے تو دونوں مربعوں کے اضلاع معلوم کیجیے۔

4.5 جزروں کی قسم

پچھلے سیکشن میں آپ نے دیکھا کہ دو درجی مساوات کے جزر ہیں۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر $b^2-4ac>0$ تو ہمیں دو مختلف حقیقی جزر مل سکتے ہیں $-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

اگر $b^2-4ac=0$ تب $x=-\frac{b}{2a}\neq 0$ یعنی $-\frac{b}{2a}$ یا $x=\frac{-b}{2a}$

اس لئے دونوں $ax^2+bx+c=0$ اس مساوات کے جذر ہیں

اس لئے ہم کہتے ہیں کہ وہ درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے دو مساوی حقیقی جذر ہوتے ہیں۔

اگر $b^2-4ac=<0$ ہے تب کوئی ایسا حقیقی عدد نہیں ہے جس کا مربع b^2-4ac ہو۔

(b^2-4ac) وضاحت کرتا ہے کہ دی گئی دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے حقیقی جذر ہوتے ہیں یا نہیں،

اس لیے b^2-4ac کو اس دو درجی مساوات کا ممیز (discrimanant) کہتے ہیں۔

کیونکہ b^2-4ac کی قدر طے کرتی ہے کہ دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جذر حقیقی ہیں یا نہیں،

b^2-4ac دو درجی مساوات کی ممیّز (Discriminant) کہتے ہیں۔

اس لئے دو درجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے جذر

(i) مختلف اور حقیقی ہوں گے اگر $b^2-4ac>0$

(ii) حقیقی اور مساوی ہوں گے اگر $b^2-4ac=0$

(iii) حقیقی نہیں ہوں گے اگر $b^2-4ac<0$

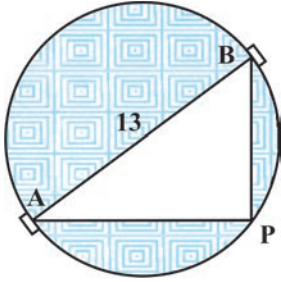
آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 16: دو درجی مساوات $2x^2-4x+3=0$ کا ممیز معلوم کیجئے اور پھر اس کے جزروں کو استعمال معلوم کیجئے۔

حل: دی ہوئی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کی شکل کی ہے جہاں $a=2$، $b=-4$ اور $c=3$ اس لئے ممیّز ہے

$$b^2-4ac=(-4)^2-(4\times 2\times 3)=16-24=-8<0$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جزر نہیں ہیں۔

مثال 17: 13 میٹر قطر والے ایک دائری پارک کی باؤنڈری کے ایک نقطہ پر ایک کھمبا اس طرح کھڑا کیا جاتا ہے کہ اس کے قطر کے سرے کے نقطوں A اور B پر موجود دو دروازوں سے اس کے فاصلہ کا فرق 7 میٹر ہے۔ کیا ایسا کرنا ممکن ہے؟ اگر ہاں تو

معلوم کیجئے کہ 2 دروازوں سے کتنے فاصلہ پر کھمبا کھڑا کیا جائے گا۔

شکل 4.4

حل: آیئے پہلے ڈائی گرام بنایئے (شکل 4.4 دیکھئے)

مان لیجئے P، کھمبا کا مطلوبہ مقام ہے، مان لیجئے کھمبا کا دروازہ B سے فاصلہ x میٹر ہے یعنی $BP = x$ میٹر۔ اب دونوں دروازوں کے کھمبا سے فاصلوں کا فرق $AP - BP = 7$ میٹر

(یا $BP - AP$) اس لئے $AP = (x + 7)$ میٹر

اب $AB = 13$ میٹر اور کیونکہ AB وتر ہے

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(کیوں؟)}$$

اس لئے $\quad AP^2 + PB^2 = Ab^2 \quad$ (فیثا غورث کا مسئلہ)

یعنی $\quad (x+7)^2 + x^2 = 13^2$

یعنی $\quad x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

یعنی $\quad 2x^2 + 14x - 120 = 0$

اس لئے دروازہ B سے کھمبا کا فاصلہ x مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

اس لئے اگر اس مساوات کے جزر حقیقی ہوئے تو ایسا ممکن ہے کہ کھمبا اس مقام پر لگایا جا سکے۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ ایسا ہے آیئے اس کی ممیّز (Discriminant) پر غور کیجئے۔ ممیّز ہے۔

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

اس لئے دی ہوئی دو درجی مساوات کے دو حقیقی جزر ہیں۔ اس لئے پارک کی باؤنڈری پر کھمبا کھڑا کیا جا سکتا ہے۔

دو درجی مساوات $x^2 + 7x - 60 = 0$ کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

اس لئے $x = 5$ یا -12

کیونکہ x دروازہ B اور کھمبے کے درمیان فاصلہ ہے۔ اس لئے یہ مثبت ہوگا۔ اس لئے $x = -12$ کو نظر انداز کرنا ہوگا۔ اس لئے $x = 5$

اس لئے کھمبا پارک کی باؤنڈری پر دروازہ B سے 5 میٹر کے فاصلہ پر اور دروازہ A سے 12 میٹر کے فاصلہ پر ہوگا۔

مثال 18: مساوات $3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ کا ممیّز معلوم کیجئے اور پھر جزروں کی استعمال معلوم کیجئے۔ ان کو معلوم کیجئے اگر یہ حقیقی ہیں۔

حل: یہاں $a = 3, b = -2$ اور $c = \frac{1}{3}$

اس لئے ممیّز $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

اس طرح دی ہوئی دودرجی مساوات کے دو مساوی حقیقی جزر ہیں۔

جزر ہیں $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ یعنی $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ یعنی $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

مشق 4.4

1۔ مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کے جزروں کی nature معلوم کیجئے۔ اگر جزر موجود ہیں تو ان کو معلوم کیجئے۔

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2۔ k کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے مندرجہ ذیل دودرجی مساوات کے مساوی جزر ہیں۔

(i) $2x^2 - kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x-2) + 6 = 0$

3۔ کیا یہ ممکن ہے کہ ایسا آموں کا باغ ڈیزائن کیا جائے جس کی لمبائی اس کی چوڑائی کی دگنی ہے اور اس کا رقبہ $800 m^2$ ہو؟ اگر ایسا ممکن ہے تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

4۔ کیا مندرجہ ذیل صورتِ حال ممکن ہے۔ اگر ہے تو ان کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

دو دوستوں کی عمروں کا حاصل جمع 20 سال ہے۔ چار سال پہلے ان کی عمروں کا حاصل ضرب (سالوں میں) 48 تھا۔

5۔ کیا ایک ایسا مستطیل پارک کا ڈیزائن کرنا ممکن ہے جس کا احاطہ 80 میٹر ہو اور رقبہ 400 مکعب میٹر ؟ اگر ہے تو اس کی لمبائی و چوڑائی معلوم کیجئے۔

4.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1۔ متغیر x میں دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہوتی ہے جہاں b, a اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ۔

2۔ ایک حقیقی عدد α دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر مساوی ہوتے ہیں۔

3۔ اگر ہم دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کو دو خطی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں تو دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ہر ایک خطی جزو ضربی کو صفر کے برابر رکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔

4۔ دودرجی مساوات کو مربع مکمل کرکے، طریقہ سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔

5۔ دودرجی فارمولہ: دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ہیں

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ہے جب کہ $b^2 + 4ac \geq 0$

6۔ ایک دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے

(i) دو مختلف اور حقیقی جزر ہوں گے اگر $b2 + 4ac > 0$

(ii) مساوی جزر ہوں گے اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) حقیقی جزر نہیں ہوں گے اگر $b^2 - 4ac < 0$

قارئین کے لئے نوٹ

عبارتی سوال کے سلسلہ میں موصول حل کو ہمیشہ اصل مساوات کی شرطوں میں رکھ کر تصدیق کرنی چاہیے نہ کہ بعد میں بنی مساواتوں کے (مثالیں 19,13,11 جو باب 3 کی ہیں اور باب 4 کی مثالوں 11,10 اور 12 کو دیکھیے)۔